

Leçon 5.1

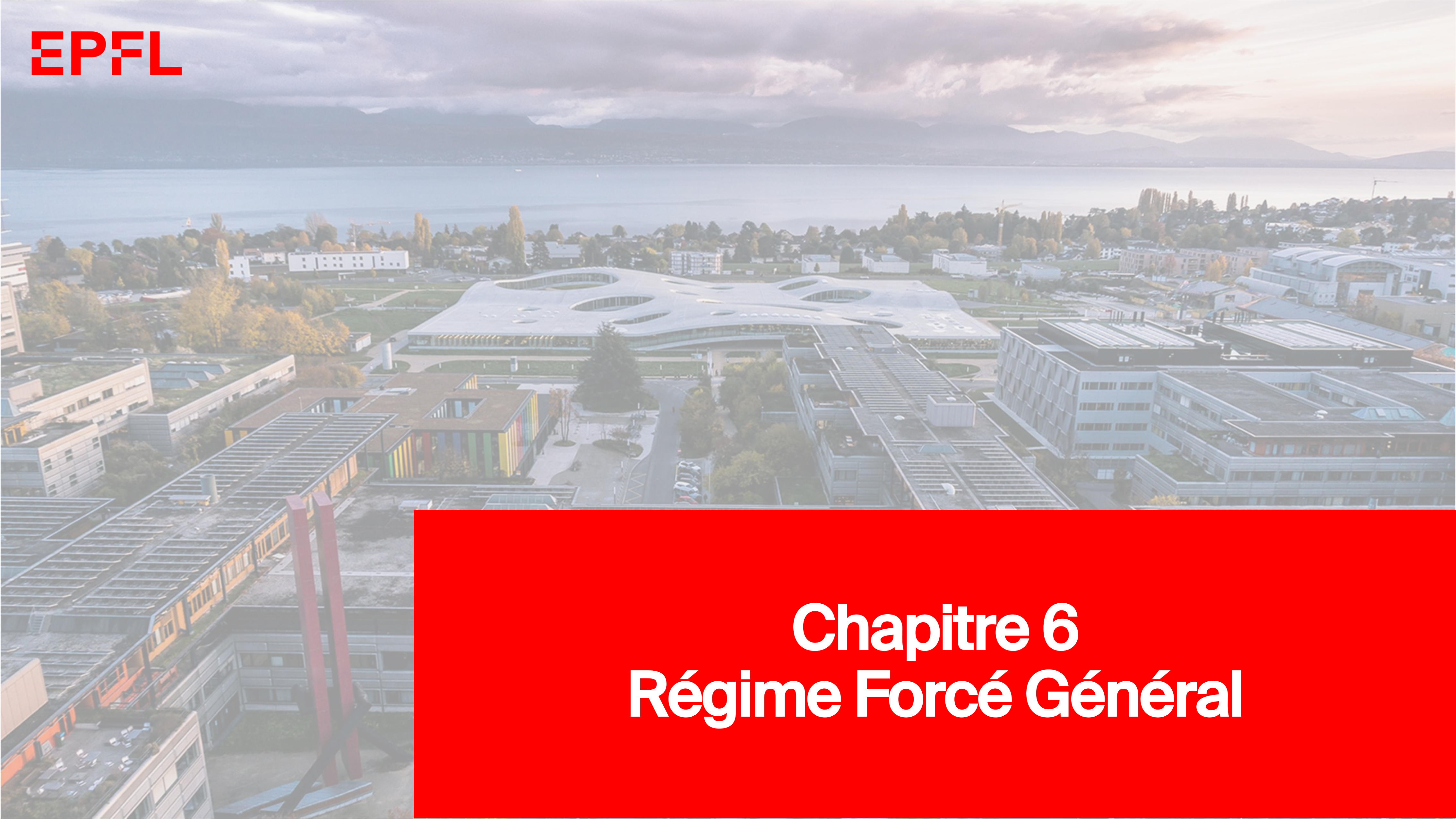
Oscillateur 1D

Forcé Général

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

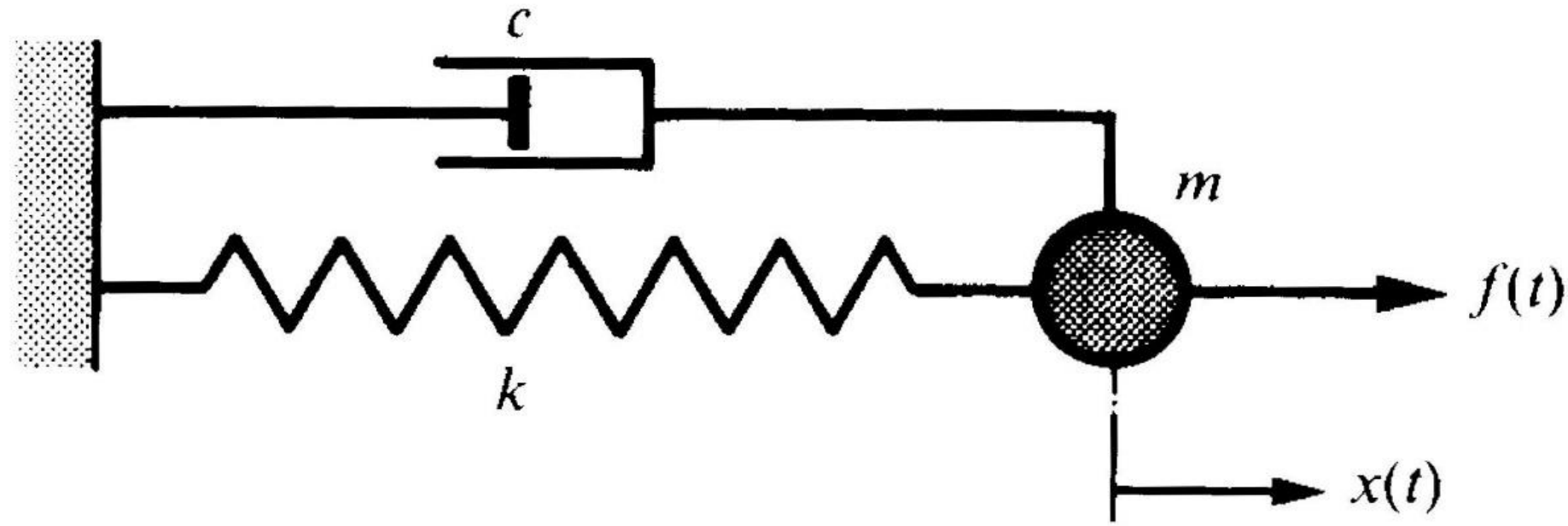
- Régime forcé général
- Solution sur-amortie
- Solution cas critique
- Solution sous-amortie
- Impulsion de Dirac
- Échelon de force



Chapitre 6

Régime Forcé Général

EPFL Régime forcé général



Régime forcé de l'oscillateur élémentaire
(f quelconque)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$$

Solution complète de la forme

$$x = x'(t) + x''(t)$$

$x'(t)$ solution particulière de l'équation

$x''(t)$ solution générale sans second membre

Méthodes de résolution

- recherche directe de solutions particulières
- transformation de Laplace
- transformation de Fourier
- analyse numérique

EPFL Solution générale - Laplace

$$\begin{aligned} X(s)(m s^2 + c s + k) &= \\ &= F(s) + X_0(m s + c) + V_0 m \end{aligned} \quad (6.1)$$

Définition de l'*admittance opérationnelle* ou
fonction de transfert

$$Y(s) = \frac{1}{m s^2 + c s + k} \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2 \lambda s + \omega_0^2} \quad (6.5)$$

Transformée de Laplace du mouvement

$$X(s) = Y(s) F(s) + \frac{X_0(s + 2 \lambda) + V_0}{s^2 + 2 \lambda s + \omega_0^2} \quad (6.6)$$

EPFL Solution générale - Laplace

$$X(s) = Y(s) F(s) + \frac{X_0(s + 2\lambda) + V_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (6.6)$$

Transformée inverse de Laplace du mouvement
(solution du régime forcé)

$$x(t) = x_a(t) + x_b(t)$$

$x_a(t)$ fonction inverse du premier membre

$x_b(t)$ fonction inverse des termes initiaux

Calcul de la réponse $x_a(t)$ par le théorème de
composition – *intégrale de convolution*

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \int_0^t y(t-u) f(u) du \\ &= \int_0^t y(u) f(t-u) du \end{aligned} \quad (6.7)$$

EPFL Solution générale – surcritique

Fonction de transfert et réponse temporelle en
cas d'*amortissement surcritique* ($\eta > 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)}$$

avec
$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \operatorname{sh} \omega_1 u \cdot f(t - u) du \\ + e^{-\lambda t} \left(X_0 \operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \right) \quad (6.9)$$

EPFL Solution générale – critique

Fonction de transfert et réponse temporelle en cas d'*amortissement critique* ($\eta = 1$)

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \omega_0)^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t u e^{-\omega_0 u} \cdot f(t - u) du + \left(X_0 + (\omega_0 X_0 + V_0) t \right) e^{-\omega_0 t} \quad (6.11)$$

EPFL Solution générale – sous-critique

Fonction de transfert en cas d'*amortissement sous-critique* ($\eta < 1$)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2 - \lambda^2} \\ &= \frac{1}{m \omega_1} \frac{\omega_1}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} \end{aligned}$$

Admittance temporelle correspondante

$$y(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \sin \omega_1 t \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m \omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \sin \omega_1 u \cdot f(t - u) du \\ &\quad + X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \end{aligned} \quad (6.13)$$

avec

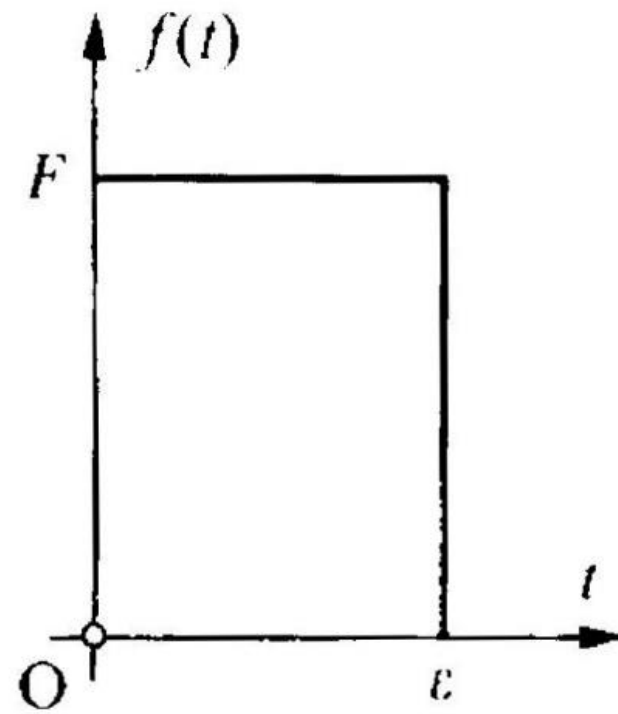
$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0}$$

EPFL Solution de l'impulsion de Dirac

Définition de l'*impulsion de Dirac* (force impulsionnelle F)

$$F \varepsilon = 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0, F \rightarrow \infty) \quad [F \varepsilon] = 1 \text{ N s}$$



Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 1$$

Transformée de Laplace de la réponse (sous conditions initiales nulles)

$$X(s) \equiv D(s) = Y(s) \cdot F(s) = Y(s) \cdot 1 = Y(s)$$

Réponse de l'oscillateur soumis à une impulsion de Dirac : *réponse impulsionnelle*

$$d(t) = y(t) \quad (6.14)$$

Analyse dimensionnelle des grandeurs

$$[d(t)] = \text{m} \quad [y(t)] = \text{s/kg}$$

$$[D(s)] = \text{m s} \quad [Y(s)] = \text{N/m} = \text{s}^2/\text{kg}$$

$$[F(s)] = \text{N s} \quad [s] = [\omega_0] = 1/\text{s}$$

EPFL Solution de l'impulsion de Dirac

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
surcritique ($\eta > 1$)

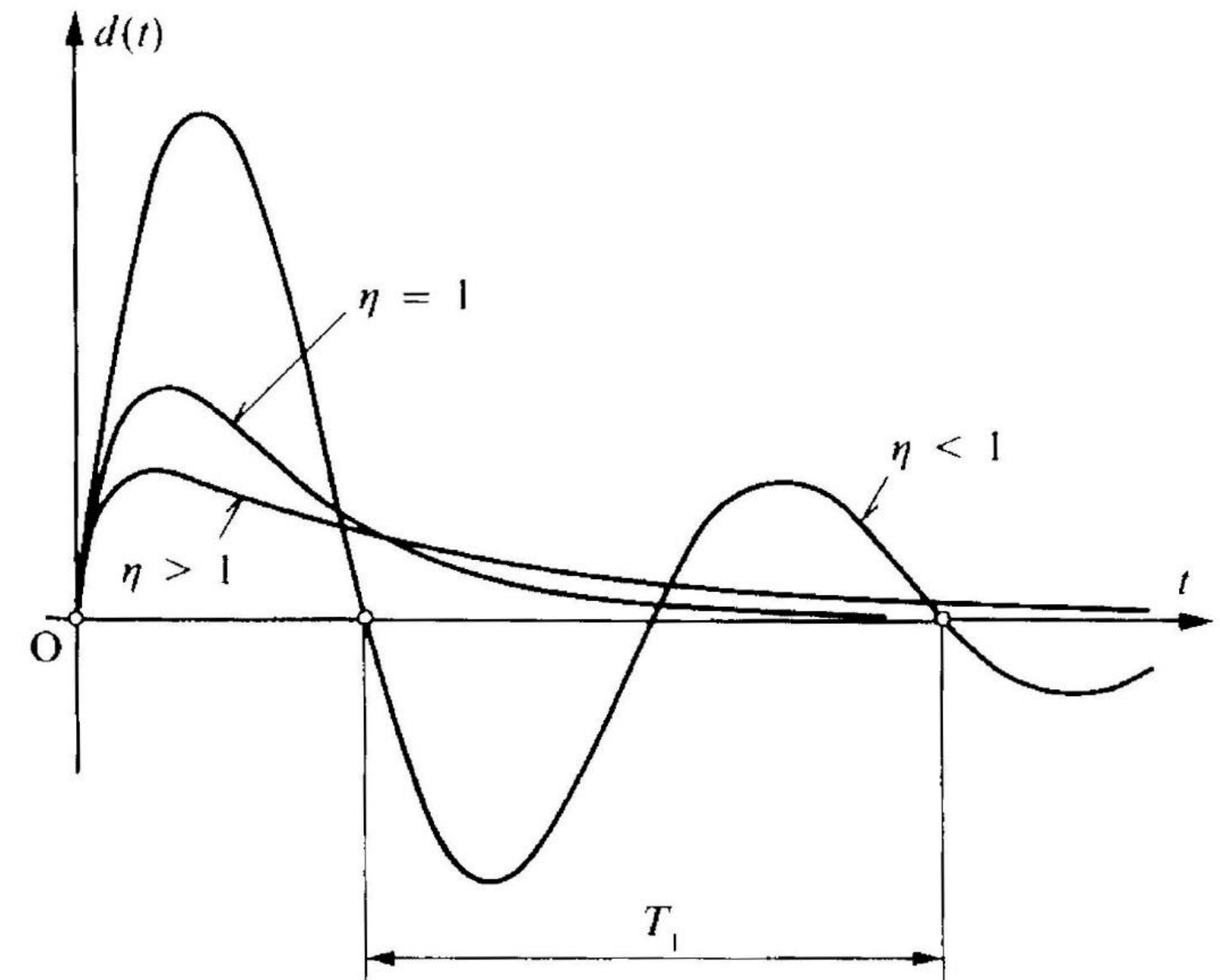
$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{e^{-\lambda t}}{2 m \omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) \\ &= \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \end{aligned} \quad (6.15)$$

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
critique ($\eta = 1$)

$$d(t) = \frac{t}{m} e^{-\omega_0 t} \quad (6.16)$$

Réponse impulsionnelle en cas d'*amortissement*
sous-critique ($\eta < 1$)

$$d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m \omega_1} \sin \omega_1 t \quad (6.17)$$

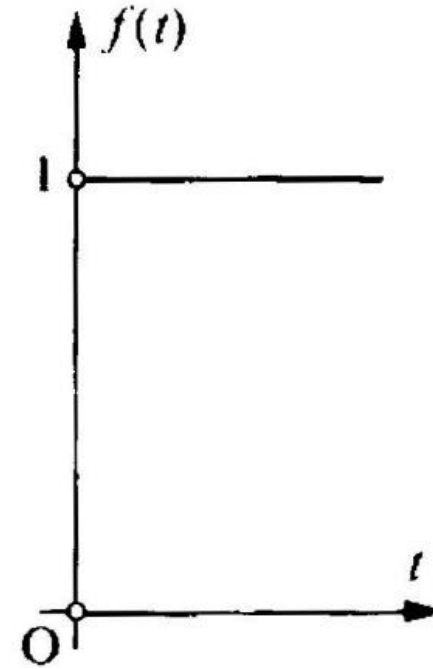


EPFL Solution de l'échelon de force

Définition de l'échelon de force

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$f(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq 0$$



Transformée de Laplace de l'échelon de force

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = 1/s$$

Transformée de Laplace de la réponse indicielle
(sous conditions initiales nulles)

$$X(s) \equiv E(s) = Y(s) \cdot F(s) = \frac{1}{s} Y(s) \quad (6.20)$$

Réponse indicielle en cas d'*amortissement*
surcritique ($\eta > 1$)

$$e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \right) \right) \quad (6.22)$$

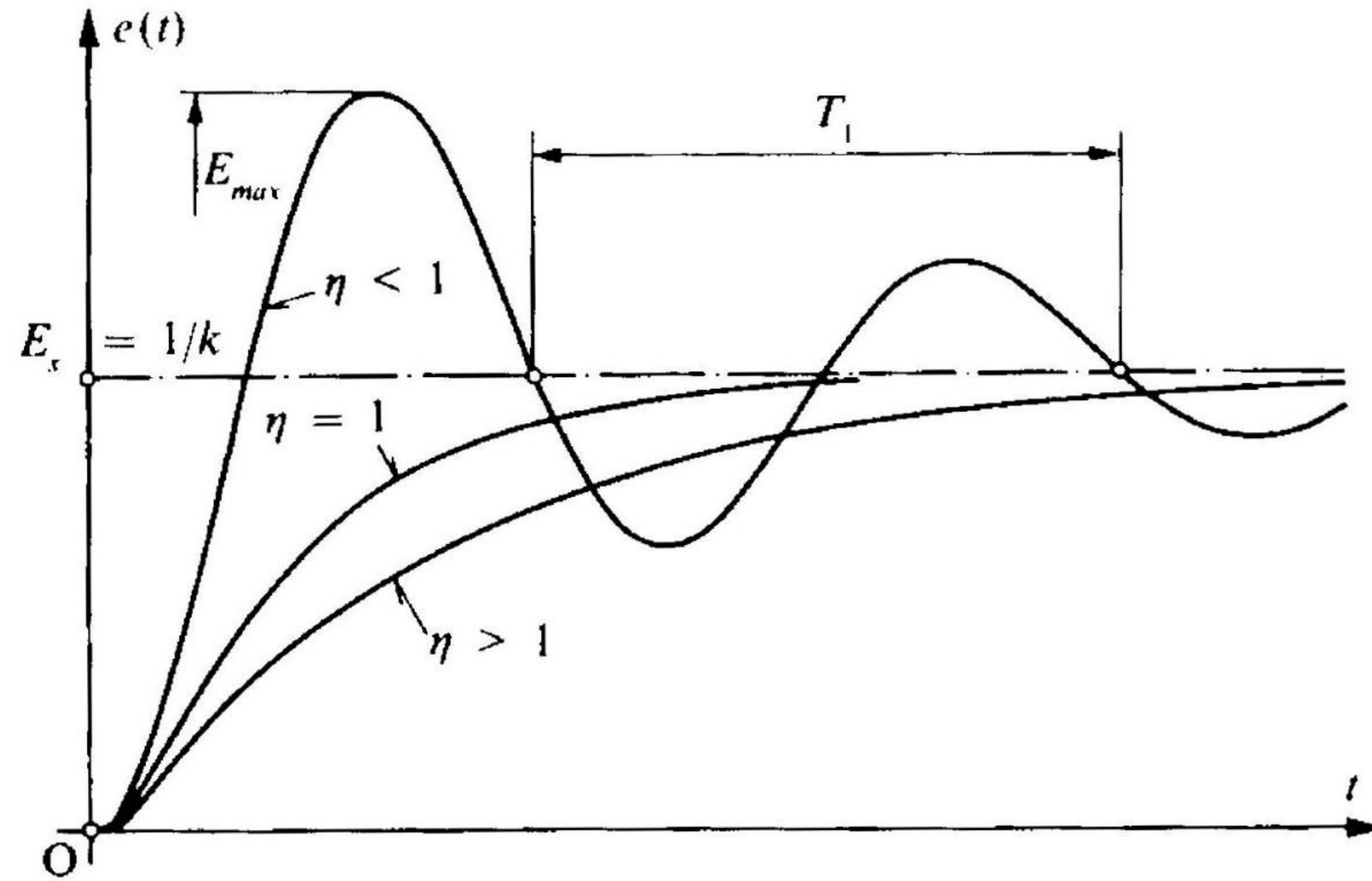
Réponse indicielle en cas d'*amortissement*
critique ($\eta = 1$)

$$e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right) \quad (6.25)$$

Réponse indicielle en cas d'*amortissement* *sous-*
critique ($\eta < 1$)

$$e(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right) \quad (6.27)$$

EPFL Solution de l'échelon de force



Relation entre les réponses *impulsionnelle* et *indicielle*

$$D(s) = Y(s) \cdot 1 \quad E(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow D(s) = s E(s) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{L}(\dot{e}(t)) = s E(s) \quad (e(0) = 0) \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow D(s) = \mathcal{L}(\dot{e}(t)) \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow d(t) = \dot{e}(t) \quad (6.34)$$

EPFL Relation entre les réponses d et e

$$D(s) = Y(s) \cdot 1 \quad E(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow D(s) = s E(s) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{L}(\dot{e}(t)) = s E(s) \quad (e(0) = 0) \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow D(s) = \mathcal{L}(\dot{e}(t)) \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow d(t) = \dot{e}(t) \quad (6.34)$$

